

# スピンと軌道の電子論

(2021/04/14 堀 文哉)

## 第 1 章 基礎事項

### 1.1 電磁気学の基本方程式と単位系

1.1.1 基本方程式と単位系 ←堀が担当

1.1.2 物質中の電磁場 ←堀が担当

1.1.3 電磁ポテンシャルとゲージ変換 ←堀が担当

1.1.4 多極子展開と双極子モーメント ←堀が担当

1.1.5 双極子モーメントと電磁場との相互作用

1.1.6 1 電子の双極子モーメント

1.1.7 磁性の古典論と量子論

### 1.2 第 2 量子化の方法

1.2.1 生成消滅演算子と数表示

1.2.2 1 粒子および 2 粒子演算子

1.2.3 基底変換と場の演算子

### 1.3 線形応答理論

1.3.1 外場による時間発展

1.3.2 断熱感受率

1.3.3 複素感受率の解析的性質

1.3.4 揺動散逸定理

1.3.5 等温感受率

## 1.1 電磁気学の基本方程式と単位系

### 1.1.1 基本方程式と単位系

古典電磁気学の基礎方程式は以下の Maxwell 方程式と呼ばれる 4 つの連立偏微分方程式である。

○真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{k}{\epsilon_0} \rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.4)$$

ここで、 $E(\mathbf{r}, t)$  および  $B(\mathbf{r}, t)$  は電場と磁束密度、 $\rho(\mathbf{r}, t)$  および  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  は電荷密度と電流密度である。また、 $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  は真空の誘電率と透磁率を表し、真空中の光速度は  $c = \gamma / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  で与えられる。

(1.1) は電場の発生源が電荷であること (ガウス-マクスウェルの式)、(1.2) は磁場の時間変化があるところには電場が生じること (ファラデー-マクスウェルの式、ファラデーの電磁誘導の法則)、(1.3) は磁気単極子 (モノポール) が存在しないこと (磁束保存の式)、(1.4) は電流と変位電流により磁場が生じること (アンペール-マクスウェルの式) を示しているが詳細は省く。

電磁気学では様々な単位系が用いられることがあるが、種々の単位系で変化する比例定数は  $k, \gamma$  の 2 個だけである [1, 2]。標準的な単位系である **SI 単位系** (国際単位系)\*<sup>1</sup> では  $k = 1, \gamma = 1$ \*<sup>2</sup> である。また、**cgs-Gauss 単位**

\*<sup>1</sup> m:長さ, kg:質量, s:時間, A:電流, K:熱力学温度, mol:物質質量, cd:光度の 7 つの基本単位で表される。

\*<sup>2</sup> 有理系と呼ぶ。また、因数  $4\pi$  が基礎方程式に含まれないような定義の方法は有理化と

系<sup>\*3</sup>では,  $k = 4\pi, \gamma = c, \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ <sup>\*4</sup>である。テキストには記されていないが, SI 単位系や cgs-Gauss 単位系の他に cgs-esu 単位系 (静電単位系), cgs-emu 単位系 (電磁単位系), ヘヴィサイド・ローレンツ (Heaviside-Lorentz) 単位系での  $\epsilon_0, \mu_0, k, \gamma$  について下の表にまとめた。

表: 種々の単位系での  $\epsilon_0, \mu_0, k, \gamma$ 。

	$\epsilon_0$	$\mu_0$	$k$	$\gamma$
SI 単位系	$\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$	$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$	1	1
cgs-Gauss 単位系	1	1	$4\pi$	$c$
cgs-esu 単位系	1	$c^{-2}$	$4\pi$	1
cgs-emu 単位系	$c^{-2}$	1	$4\pi$	1
HL 単位系	1	1	1	$c$

SI 単位系 [E-B 対応] と cgs-Gauss 単位系における単位を表 1.1 に, 物理定数を表 1.2 にまとめた。日本磁気学会のホームページには, cgs-Gauss 単位系から SI 単位系の変換係数がまとめられている [3]。

---

呼ばれる。

\*3 電磁気のための新しい基本単位を追加せずに, cm, g, s の単位の組み合わせで表される。

\*4 非有理系と呼ぶ。

表 1.1: SI 単位系 [E-B 対応] および cgs-Gauss 単位系における物理量と単位。

物理量	記号	SI 単位系 [E-B]	cgs-Gauss 単位系
電荷	$q$	C (=A s)	Fr (esu, statC)
誘電率	$\epsilon$	F/m (=C/V · m)	無次元
電場	$\mathbf{E}$	V/m	statV/cm
電束密度	$\mathbf{D}$	C/m <sup>2</sup>	Fr/cm <sup>2</sup> (=statV/cm)
電気分極	$\mathbf{P}$	C/m <sup>2</sup>	Fr/cm <sup>2</sup>
電気双極子モーメント	$\mu_e$	m C <sup>2</sup>	cm Fr
(体積) 磁化率	$\chi$	無次元	無次元
(モル) 磁化率	$\chi_{\text{mol}}$	m <sup>3</sup> /mol	cm <sup>3</sup> /mol
透磁率	$\mu$	H/m (=Tm/A)	無次元
磁束密度	$\mathbf{B}$	T (=Wb/m <sup>2</sup> )	G
磁場	$\mathbf{H}$	A/m	Oe (=G)
(体積) 磁化	$\mathbf{M}$	A/m	Oe
磁気双極子モーメント	$\mu_m$	m <sup>2</sup> A (=J/T)	cm <sup>3</sup> Oe
電流	$\mathbf{I}$	A	Fr/s
電流密度	$\mathbf{j}$	A/m <sup>2</sup>	Fr/s · cm <sup>2</sup>
コンダクタンス	$G$	S(=A/V)	cm/s
電気伝導度	$\sigma$	S(=A/V)	cm/s
電気抵抗	$R$	$\Omega$ (=V/A)	s/cm
電気抵抗率	$\rho$	$\Omega\text{m}$	s

表 1.2: SI 単位系 [E-B 対応] および cgs-Gauss 単位系における物理定数。

\* は定義された物理定数。

物理量	記号	SI 単位系 [E-B]	cgs-Gauss 単位系
真空中の光速度 *	$c$	$2.99792458 \times 10^8$ m/s	$\bar{c} = 10^2 c$ cm/s
Plank(Dirac) 定数 *	$\hbar$	$1.054571812 \times 10^{-34}$ Js	$\times 10^7$ erg s
素電荷 *	$e$	$1.602176634 \times 10^{-19}$ C	$\times \bar{c}/10$ Fr
Boltzmann 定数 *	$k_B$	$1.380649 \times 10^{-23}$ J/K	$\times 10^7$ erg/K
真空の誘電率	$\epsilon_0$	$8.8541878128 \times 10^{-12}$ F/m	1
真空の透磁率	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ $\times 1.00000000055$ H/m	1
電子の質量	$m$	$9.1093837015 \times 10^{-31}$ kg	$\times 10^3$ g
Bohr 磁子	$\mu_B$	$9.2740100783 \times 10^{-24}$ m <sup>2</sup> A	$\times 10^3$ cm <sup>3</sup> Oe

### ○表 1.1, 1.2 について補足説明

- 1 Fr<sup>\*5</sup>(=esu<sup>\*6</sup>=statC<sup>\*7</sup>) は真空中に 1 cm の間隔で置かれた互いに等しい電気量の間働く力が 1 dyn(= g · cm/s<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> N) であるときの電気量<sup>\*8</sup>。
- 1 statV<sup>\*9</sup> は 1 statC の電荷が 1 erg(= g · cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> = 10<sup>-7</sup> J) の仕事をする電位差<sup>\*10</sup>。

\*5 franklin (フランクリン)。

\*6 electrostatic unit(静電単位)。

\*7 statcoulomb(スタットクーロン)。

\*8 誘電率が無次元量なので電荷の次元は [力]<sup>1/2</sup>[長さ] となる。スタットクーロンとクーロンの換算は, 1 statC  $\approx$  3.335641  $\times$  10<sup>-10</sup> C。

\*9 statvolt(スタットボルト)。

\*10 スタットボルトとボルトの換算は, 1 statV  $\approx$  299.79245 V

- 真空中では磁場の強さ  $H$  が 1 Oe のとき磁束密度  $B$  は 1 G(=  $10^{-4}$  T) となるため cgs 単位系ではこれらは同一のものとして扱える\*<sup>11</sup>。
- cgs-Gauss 単位系において,  $E, D, P, B, H, M$  の単位は異なるが全て同じ次元\*<sup>12</sup>。
- テキストには記されていないが, cgs 単位系の「emu」\*<sup>13</sup>を用いて, 体積磁化は「emu/cm<sup>3</sup>», 体積磁化率は「emu/(cm<sup>3</sup> · Oe)», モル磁化率は「emu/(mol · Oe)」\*<sup>14</sup>を使うことがある。ただ, 日本磁気学会では SI 単位系を推奨している [3]。
- テキスト表 1.1 の磁場や磁化の SI 単位は A/m とあるが, 低温物理ではあまり A がつく単位は使わず, 磁場は  $\mu_0 H$  として  $\mu_0$  を付けて「T(テスラ)», 磁化は「 $\mu_B$ /磁性イオン」を使う印象 [4]。
- テキスト表 1.2 の  $c$  はセンチメートル単位の光速度の値 (センチメートル毎秒ではなく無次元の値)。

---

\*<sup>11</sup> 「G」は磁束密度  $B$  の単位であり, 「Oe」は磁場  $H$  の単位であるが cgs-Gauss 単位系では透磁率が無次元量なので, 磁場と磁束密度は次元が同じであり, 単位の区別は約束事にすぎない。また,  $B, H$  とも単に磁場と呼ぶことが多い

\*<sup>12</sup> エネルギー密度の平方根。(1.6)を見ると分かりやすい。

\*<sup>13</sup> 1 emu の電流とは真空中に 1 cm の間隔で同じ大きさの電流が流れているとき, 両者の間に働く力が 1 cm につき 2 dyn であるときの電流。

\*<sup>14</sup> 「Oe」を省略して「emu/mol」と書くこともある。

(1.4) に  $\nabla \cdot$  を作用させると

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k \nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k \nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k \nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\epsilon_0} \rho \right) \right) \quad (\because (1.1)) \\
 &= \frac{\mu_0 k}{\gamma} \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

となり，恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$  を用いれば，電荷の保存を表す連続の方程式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

エネルギー密度  $E/V$  (この  $E$  は電場  $\mathbf{E}$  の大きさではなくてエネルギー) および Poynting ベクトル  $\mathbf{S}$  の表式は

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{2k} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad \mathbf{S} = \frac{\gamma}{\mu_0 k} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

である。(1.2), (1.4) より,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{\gamma} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{\gamma} k \mathbf{j} \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

であり，第 1 の式の両辺と電場  $\mathbf{E}$  との内積をとり，第 2 の式については，両辺と磁束密度  $\mathbf{B}$  との内積をとると

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\mu_0}{\gamma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{\gamma} k \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\gamma} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

上の 2 つの式の両辺をそれぞれ引き算すると

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\mu_0}{\gamma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{\gamma} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{\gamma} k \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\mu_0}{\gamma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\gamma} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{\gamma} k \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ (\because \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) \\ -\frac{\gamma}{\mu_0 k} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\epsilon_0}{k} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 k} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ \therefore -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{k} \mathbf{E} \right) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\mu_0 k} \mathbf{B} \right) &= \frac{\gamma}{\mu_0 k} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}$$

となる。(1.6) から

$$\begin{aligned}-\frac{\partial E/V}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2k} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2k\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{k} \mathbf{E} \right) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\mu_0 k} \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\mu_0 k} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}$$

となり，エネルギー保存則

$$\frac{\partial E/V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.7)$$

を得る。 $\mathbf{S}$  は電磁場のもつ運動量密度を表す。また，電荷  $q$ ，速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  で運動する粒子にはたらく Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{\gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \quad (1.8)$$

となる。

### 1.1.2 物質中の電磁場

物質内部では，外部から印加した電磁場だけではなく，それに応答して物質内部が作り出す寄与も考えなければならない。物質内部に生じた電気分極  $\mathbf{P}$  と磁化  $\mathbf{M}$  を用いて

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + k\mathbf{P} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + k\mathbf{M}) \quad [\text{E-B 対応}] \quad (1.10)$$

のように，電束密度  $\mathbf{D}$  および磁場（の強さ） $\mathbf{H}$  を導入する。磁化の定義では，式 (1.10) のような  $\mathbf{E}$ - $\mathbf{B}$  対応の他に  $\mathbf{E}$ - $\mathbf{H}$  対応と呼ばれる定義も用いられる。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + k\mathbf{M} \quad [\text{E-H 対応}] \quad (1.11)$$

SI 単位系では、これらの 2 つの定義によって磁化の単位が異なるが、cgs-Gauss 単位系では透磁率が  $\mu_0 = 1$  の無次元量となり、 $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{B}$  の単位は同じになるので、E-B 対応と E-H 対応の区別はなくなる。以下では、断りのない限り **E-B** 対応のみ取り扱う。

電荷密度  $\rho$  を原子や分子の内部において電荷分布のわずかなずれによって生じた分極電荷  $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  と真電荷  $\rho_{\text{tr}}$  に分解して  $\rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{tr}}$  とすると、(1.1) から

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{k}{\epsilon_0} (\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{tr}}) \\ &= \frac{k}{\epsilon_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{\text{tr}}) \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + k \mathbf{P}) &= \frac{k}{\epsilon_0} \rho \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} &= k \rho_{\text{tr}}\end{aligned}\tag{1.12}$$

となる (図 1.1)。同様に、電流密度  $\mathbf{j}$  を電気分極の時間変化から生じる分極電流  $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ 、磁化の空間変化から生み出される渦 (磁化) 電流  $\mathbf{j}_{\text{mag}} = \gamma (\nabla \times \mathbf{M})$  と、それ以外の伝導電流  $\mathbf{j}_{\text{cond}}$  に分解して  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mathbf{j}_{\text{mag}} + \mathbf{j}_{\text{cond}}$  とすると、(1.4) から

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k\mathbf{j}_{\text{pol}} + k\mathbf{j}_{\text{mag}} + k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + k\gamma(\nabla \times \mathbf{M}) + k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 k \mathbf{M}) &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + k\mathbf{P}) \right) \\
\mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}) &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (\because (1.9), (1.10)) \\
\therefore \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\gamma} \left( k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \tag{1.13}
\end{aligned}$$

となる (図 1.2)。以上をまとめると、物質中の Maxwell 方程式は以下のようになる。

○物質の Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= k\rho_{\text{tr}} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\gamma} \left( k\mathbf{j}_{\text{cond}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

また、テキストには記されていないが、種々の単位系での  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ , Maxwell 方程式, Lorentz 力の式の定義について表にまとめた。

図 1.1: 誘電体による電場。外部から印加した電場を  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  とした。

図 1.2: 磁性体による磁場。外部から印加した磁束密度を  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  とした。この図では  $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  である。

表: 種々の単位系での  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ , Maxwell 方程式, Lorentz 力の式の定義。

単位系	$\mathbf{D}, \mathbf{H}$	Maxwell 方程式	Lorentz 力
SI (E-B 対応)	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
cgs-Gauss	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$
cgs-esu (E-B 対応)	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2 \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
cgs-emu	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
cgs-HL	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$

単位体積あたりの電気双極子モーメントの個数を  $n$  とし、1つの電気双極子モーメントの応答係数（分極率） $\alpha$  を用いて、 $\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}$  という比例関係が成り立ち、同様に、磁化率  $\chi$  を用いて、 $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$  の比例関係が成り立つと仮定すると

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + kn\alpha)\mathbf{E} \equiv \epsilon\mathbf{E} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + k\chi)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H} \quad (1.15)$$

のように、 $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}$  に比例する形となり、Maxwell 方程式は閉じた方程式となる。ここで、 $\epsilon$  を誘電率、 $\mu$  を透磁率と呼ぶ。但し、一般には、 $\alpha$  や  $\chi$  は異方的なテンソル量であり、同様に  $\epsilon$  や  $\mu$  もテンソル量となるので、

$$D_i = \sum_j^{x,y,z} \epsilon_{ij} E_j \quad B_i = \sum_j^{x,y,z} \mu_{ij} H_j \quad (i = x, y, z) \quad (1.16)$$

のように表される。(1.14), (1.15) は  $\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{i,j}$ ,  $\mu_{ij} = \mu\delta_{i,j}$  が成立し、等方的な場合である。

### 1.1.3 電磁ポテンシャルとゲージ変換

電場と磁束密度は、スカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{r}, t)$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  を用いて

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.18)$$

と表すことができる。もちろん、任意のスカラー場  $\phi$  とベクトル場  $\mathbf{A}$  に対する恒等式  $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$ ,  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$  を用いると

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times (\nabla \phi) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0\end{aligned}$$

と (1.2) と (1.3) が成り立つことがわかる。

$\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  を与える電磁ポテンシャルの  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  は一意には定まらない。すなわち、実数の任意のスカラー場  $f(\mathbf{r}, t)$  を用いて、ゲージ変換

$$\phi' = \phi - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1.19}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \tag{1.20}$$

によって関係づけられる任意のゲージを用いても

$$\begin{aligned}-\nabla \phi' - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla \left( \phi - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla f) \\ &= -\nabla \phi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f) \\ &= -\nabla \phi - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla f) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\because \nabla \times (\nabla f) = 0)\end{aligned}$$

となり、同じ  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  が得られる。代表的なゲージ固定条件を挙げておく。

○代表的なゲージ固定条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad [\text{Coulomb/London ゲージ}] \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad [\text{Lorenz ゲージ}] \quad (1.22)$$

空間的に一様な静電場  $\mathbf{E}$  や静磁場  $\mathbf{B}$  に対しては

$$\phi = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \quad [\text{対称ゲージ}] \quad (1.24)$$

$$\mathbf{A} = (0, xB, 0) \quad [\text{Landau ゲージ}] \quad (1.25)$$

これ以降は、特に断りがない限り **cgs-Gauss** 単位系 ( $k = 4\pi, \epsilon_0 = \mu_0 = 1, \gamma = c$ ) を使う。

#### 1.1.4 多極子展開と双極子モーメント

静電場や静磁場では  $\phi$  や  $\mathbf{A}$  も時間に依存しないと考えて、(1.17) は  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  となる。この式を (1.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\nabla\phi) &= \frac{k}{\epsilon_0} \rho = 4\pi\rho \quad (\because k = 4\pi, \epsilon_0 = 1) \\ \therefore \nabla^2\phi &= -4\pi\rho \end{aligned} \quad (1.26)$$

となり、Poisson 方程式を得る。同様に、Coulomb ゲージ (1.21) を用いて、(1.18) を (1.4) に代入すると

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left( k\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\because k = 4\pi, \mu_0 = 1, \gamma = c, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0) \\
\nabla^2 \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\because \nabla \cdot \mathbf{A} = 0)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

これらの方程式の解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.29}$$

である。このことは  $\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  を用いて確かめられる。

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
&= -4\pi\rho(\mathbf{r}) \\
\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
&= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

また、 $\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  の関係を用いると、Coulomb の法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.30)$$

同様に、定ベクトル  $\mathbf{a}$  に対する  $\nabla \times [\mathbf{a}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] = [\mathbf{a} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  の関係から、Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.31)$$

が得られる。

電磁ポテンシャルを作り出す電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  や電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  の存在領域に比べて十分に離れた点  $\mathbf{r}$  における表式は、 $r \gg r'$  に対する展開式  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = 1/r + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/r^3 + \dots$  を用いると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (1.32)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (1.33)$$

のように展開ができ、この展開を多極子（多重極）展開という（図 1.3）。展開係数  $Q, \boldsymbol{\mu}_e, \boldsymbol{\mu}_l$  は

$$Q = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \quad (1.34)$$

$$\boldsymbol{\mu}_e = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.35)$$

$$\boldsymbol{\mu}_l = \frac{1}{2c} \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \quad (1.36)$$

と定義され、それぞれ全電荷（電気単極子モーメント）、電気双極子モーメント、磁気双極子モーメントと呼ばれる。具体的に展開式を用いて計算してみると

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^3} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{r} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^3} \left( \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \right) \cdot \mathbf{r} \\
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^3} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{r} \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^3} \frac{1}{c} \left( \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right)
 \end{aligned}$$

となり、(1.32) と比較することで (1.34) と (1.35) は示すことができるが、(1.33), (1.36) については計算が複雑なので下で示す。

○  $A(\mathbf{r})$  の多重極展開の具体的な計算

◇ 第 1 項 ( $r^{-1}$  項) について

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (x' j_j(\mathbf{r}')) &= \frac{\partial}{\partial x'} (x' j_x(\mathbf{r}')) + \frac{\partial}{\partial y'} (x' j_y(\mathbf{r}')) + \frac{\partial}{\partial z'} (x' j_z(\mathbf{r}')) \\ &= j_x(\mathbf{r}') + x' \left( \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} \right) \\ &= j_x(\mathbf{r}') + x' (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \\ \therefore j_x(\mathbf{r}') &= \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (x' j_j(\mathbf{r}')) - x' (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \end{aligned}$$

ここで  $\nabla' = (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')$ 。<sup>\*15</sup>  $y, z$  についても同様なので、電荷保存  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t = 0$  に注意すると

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{r}') &= \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_i j_j(\mathbf{r}')) - r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_i j_j(\mathbf{r}')) \\ &= \nabla' \cdot (r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \end{aligned}$$

これを体積積分するとガウスの定理より

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}' \nabla' \cdot (r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \\ &= \oint_S d\mathbf{S}' \cdot (r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \quad (S \text{ は全ての } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \text{ を囲む閉曲面。}) \\ &= 0 \quad (\because S \text{ 上で } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0) \end{aligned}$$

となるので、第1項 ( $r^{-1}$  項) は  $\frac{1}{r} \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  である。

◇第2項 ( $r^{-3}$  項) について

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') j_i(\mathbf{r}') &= xx' j_i(\mathbf{r}') + yy' j_i(\mathbf{r}') + zz' j_i(\mathbf{r}') \\ &= \sum_k r_k r'_k j_i(\mathbf{r}') \\ &= \sum_k r_k \left\{ \frac{1}{2} (r'_k j_i(\mathbf{r}') + r'_i j_k(\mathbf{r}')) + \frac{1}{2} (r'_k j_i(\mathbf{r}') - r'_i j_k(\mathbf{r}')) \right\} \end{aligned}$$

ここから、Levi-Civita(レヴィ=チヴィタ)の完全反対称テンソル

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)) \\ -1 & ((i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を用いる。恒等式  $\sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} = \delta_{k,l} \delta_{i,m} - \delta_{k,m} \delta_{i,l}$  と  $\sum_{lm} \epsilon_{lmj} r'_l j'_m = (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j$  より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (r'_k j_i - r'_i j_k) &= \frac{1}{2} \sum_{lm} \delta_{k,l} \delta_{i,m} r'_l j_m - \frac{1}{2} \sum_{lm} \delta_{k,m} \delta_{i,l} r'_l j_m \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lm} (\delta_{k,l} \delta_{i,m} - \delta_{k,m} \delta_{i,l}) r'_l j_m \\
&= \frac{1}{2} \sum_{lm} \left( \sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} \right) r'_l j_m \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{kij} \left( \sum_{lm} \epsilon_{lmj} r'_l j_m \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{kij} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_k r'_i j_j) &= \frac{\partial}{\partial x'} (r'_k r'_i j_x) + \frac{\partial}{\partial y'} (r'_k r'_i j_y) + \frac{\partial}{\partial z'} (r'_k r'_i j_z) \\
&= (\delta_{k,x} r'_i j_x + \delta_{k,y} r'_i j_y + \delta_{k,z} r'_i j_z) \\
&\quad + (\delta_{i,x} r'_k j_x + \delta_{i,y} r'_k j_y + \delta_{i,z} r'_k j_z) \\
&\quad + r'_k r'_i \left( \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} \right) \\
&= \sum_l \delta_{k,l} r'_i j_l + \sum_m \delta_{i,m} r'_k j_m + r'_k r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \\
&= r'_k j_i + r'_i j_k + r'_k r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \\
\therefore r'_k j_i + r'_i j_k &= \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_k r'_i j_j) - r'_k r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j})
\end{aligned}$$

以上より，電荷保存  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t = 0$  に注意すると

$$\begin{aligned}
r'_k j_i &= \frac{1}{2}(r'_k j_i + r'_i j_k) + \frac{1}{2}(r'_k j_i - r'_i j_k) \\
&= \frac{1}{2}(r'_k j_i + r'_i j_k) + \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{kij} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_k r'_i j_j) - r'_k r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \right) + \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{kij} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial r'_j} (r'_k r'_i j_j) + \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j \\
&= \frac{1}{2} \nabla' \cdot (r'_k r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) + \frac{1}{2} \sum_j \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j
\end{aligned}$$

これを用いて、以下のように第2項 ( $r^{-3}$  項) の  $i$  成分を計算できる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^3} \left[ \frac{1}{c} \left( \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right) \right]_i \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}' \sum_k r_k (r'_k j_i(\mathbf{r}')) \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{1}{2c} \sum_k r_k \int d\mathbf{r}' \nabla' \cdot (r'_k r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) + \frac{1}{r^3} \frac{1}{2c} \sum_k r_k \int d\mathbf{r}' \sum_j \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{1}{2c} \sum_k r_k \oint_S d\mathbf{S}' \cdot (r'_k r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) + \frac{1}{r^3} \frac{1}{2c} \sum_k \sum_j r_k \int d\mathbf{r}' \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j \\
&= \frac{1}{r^3} \frac{1}{2c} \sum_k \sum_j \epsilon_{ijk} \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_j r_k \quad (\because S \text{ 上で } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0) \\
&= \frac{1}{r^3} \left[ \frac{1}{2c} \left( \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \right) \times \mathbf{r} \right]_i \quad (\because \sum_{lm} \epsilon_{lmj} a_l b_m = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j)
\end{aligned}$$

○例： $z$  軸上の位置  $\mathbf{r}'_{\pm} \equiv (0, 0, \pm d/2)$  に  $\pm q$  の点電荷を置いた場合  


---

電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  は

$$\rho(\mathbf{r}) = q [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_+) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_-)]$$

なので、(1.34) と (1.35) を計算すると

$$Q = 0 \quad (1.37)$$

$$\boldsymbol{\mu}_e = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = qd\mathbf{e}_z \quad (1.38)$$

となり、よく知られた電気双極子モーメントの表式が得られる。

○例： $xy$  平面内の円周上を  $z$  軸上から見て反時計回りに電流  $I$  が流れている場合  


---

電荷密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  は極座標表示で

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{a} \delta(\theta - \pi/2) \delta(r - a) \mathbf{e}_\phi$$

なので (1.36) を計算すると、 $\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\phi = r\mathbf{e}_z$  より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_l &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta \frac{Ir}{a} \delta(\theta - \pi/2) \delta(r - a) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\pi a^2 I}{c} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.39)$$

---

\*15 テキストでは  $(\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')$  が  $\nabla$  と同じ表記になっていたのので、区別するために  $\nabla'$  と新しく表記した。

となり，円電流（面積  $\pi a^2$ ）による磁気双極子モーメントの表式を得る。

(1.30) と (1.31) より，電磁ポテンシャル (1.32), (1.33) を偏微分することで電場と磁束密度を得る。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_e)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\mu}_e}{r^5} + \dots \quad (1.40)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_l)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\mu}_l}{r^5} + \dots \quad (1.41)$$

電気と磁気の大極子モーメントが作り出す電場と磁場（図 1.5）は，形式的に全く同型である。

○ (1.40), (1.41) の具体的な計算

(1.40) の第 1 項 ( $r^{-3}$  の項) は  $\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  の関係に  $\mathbf{r}' = 0$  を代入すると直ちに示すことができる。(1.40) の第 2 項については

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \left( \frac{\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right]_i &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= (\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r_i} (\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{r}) \\ &= -\frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_e)r_i}{r^5} + \frac{(\boldsymbol{\mu}_e)_i}{r^3} \\ &= -\left[ \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_e)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\mu}_e}{r^5} \right]_i \end{aligned}$$

と計算できる。

(1.41) については

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left( \frac{\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}}{r^3} \right) + \dots \\
&= \frac{1}{r^3} \nabla \times (\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}) + \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \times (\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}) + \dots
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}) &= 2\boldsymbol{\mu}_l \\
\nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \times (\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{r}) &= \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_e) \mathbf{r} + 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\mu}_e}{r^5}
\end{aligned}$$

の関係式を用いると

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{2\boldsymbol{\mu}_l}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_e) \mathbf{r} - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\mu}_e}{r^5} + \dots \\
&= \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_l) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\mu}_l}{r^5} + \dots
\end{aligned}$$

図 1.3: 多極子展開。

図 1.4: 極座標の微小体積素片。

図 1.5: 双極子モーメントが作り出す場。(a) 電場  $\mathbf{E}$  の場合と (b) 磁場  $\mathbf{B}$  の場合。

## 参考文献

- [1] J.D. ジャクソン「ジャクソン 電磁気学 (上)」(1995 年)
- [2] 反骨の自然哲学者 オフィシャル  
URL: <http://bakamoto.sakura.ne.jp/buturi/denjiki/tani/tani.html>
- [3] 日本磁気学会  
URL: <https://www.magnetics.jp/publication/unit/>
- [4] 『cgs を…』 cgs を SI に変換する動画【固体量子】【VR アカデミア】  
URL: [https://www.youtube.com/watch?v=ad\\_77BoUEDI](https://www.youtube.com/watch?v=ad_77BoUEDI)